Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

Examen d'analyse 4

25 juin 2018, durée : 2h.

CP2, Semestre 4. Année universitaire : 2017-2018.

N.B: **il sera tenu compte de la rédaction et la clarté des réponses.** Fouzia. MORADI

Exercice 1. : (7 points)

Soit la fonction $F:]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{(lnt)^2}$$

1pt 1) *Montrer que F est de classe* C^1 *sur* $]1,+\infty[$.

2) *Montrer que :*

1pt

$$\forall x \epsilon]1,+\infty[: \quad F'(x) = \frac{x-2}{2(lnx)^2}$$

1pt 3) *Dresser le tableau de variations de F .*

1pt 4) *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5pt 5) *a) Montrer que :* $\forall x > 1: \quad 0 < lnx \leq x - 1$

1pt *b) Montrer que :* $\lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$.

6) *Etablir la relation :*

1pt

$$F(x) = \frac{x(2-x)}{2lnx} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{lnt}$$

7) *En déduire la valeur de :*

0,5pt

$$\int_2^4 \frac{1}{lnt}\left(\frac{1}{lnt} - 1\right) dt$$

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

DMI — ENSAH

CP-II, Semestre 4	Examen d'Analyse 4	Année 2018/2019
11 juin 2019 11 يونيو 2019	durée : 2h.	Prof: F.MORADI

N.B: Il sera tenu compte de la Rédaction et de la Clarté de la Réponse "RCR".

Exercice 1: (8,5 points)

Considérons la fonction f définie pour $(x,t) \epsilon (]0,+\infty[)^2$ par : $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1 — 1- Montrer que f est de classe C^1 sur $(]0,+\infty[)^2$.

1,5 — 2- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.

1 — 3- Montrer que: $\forall x \in]0,1]: |f(x,t)| \leq \frac{1}{t^{1-x}}$

Et en déduire que : $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

4- Montrer que: $\lim_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = 0$ Et en déduire que :

1 — $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

5- Soit pour $x \epsilon]0,+\infty[$: $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

1 — a- Par une intégration par parties, établir l'égalité suivante : $F(x+1) = xF(x)$.

1,5 — b- Montrer que : $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et en déduire la valeur de $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

1,5 — 6- Soit $G(x) = \int_x^{x^2} e^{-t}t^{x-1}dt$ avec $x > 0$.

Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $G'(x)$.

DMI

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

ENSAH

Examen d'analyse 4

25 juin 2018, durée : 2h.

CP2, Semestre 4. Année universitaire : 2017-2018.

N.B: **Il sera tenu compte de la rédaction et la clarté des réponses.** Fouzia. MORADI

Exercice 1. : (7 points)

Soit la fonction $F:]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{(lnt)^2}$$

1pt 1) *Montrer que F est de classe* C^1 *sur* $]1,+\infty[$.

2) *Montrer que :*

1pt

$$\forall x \epsilon]1,+\infty[: \quad F'(x) = \frac{x-2}{2(lnx)^2}$$

1pt 3) *Dresser le tableau de variations de F.*

1pt 4) *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5pt 5) *a) Montrer que :* $\forall x > 1: \quad 0 < lnx \le x - 1$

1pt *b) Montrer que :* $\lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty.$

6) *Etablir la relation :*

1pt

$$F(x) = \frac{x(2-x)}{2lnx} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{lnt}$$

7) *En déduire la valeur de :*

0,5pt

$$\int_2^4 \frac{1}{lnt}\left(\frac{1}{lnt} - 1\right) dt$$

Exercice 2 (7 points):

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $g(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x} e^{-x}$.

0,5pt 1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x,y)$

0,5pt b) Montrer que : $\forall x \geq 1$: $|g(x,y)| \leq e^{-x}$

0,5pt c) En déduire que la fonction : $x \mapsto g(x,y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

1pt 2) Montrer que g est dérivable par rapport à y sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

3) Soit : $I(y) = \int_0^{+\infty} g(x,y)dx$

1pt a) Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1pt b) Déterminer $I'(y)$.

1pt c) Par intégration par parties, montrer que :

$$I'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

1pt d) En déduire que :

$$\forall y\in\mathbb{R}: \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x} e^{-x}dx = Arctan y$$

0,5pt e) Calculer la valeur suivante :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x}dx$$

Exercice 3 : (6 points)

1) Considérons le champ vectoriel:

$$\vec{V}(x,y,z) = (yz^2, \quad xz^2 + z, \quad 2xyz + 2z + y)$$

1pt a) Déterminer $\overrightarrow{rot}\vec{V}$.

2pt b) En déduire que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel et déterminer ses potentiels.

1pt c) Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'hélice H paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 2t \end{cases} \quad avec\ t\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

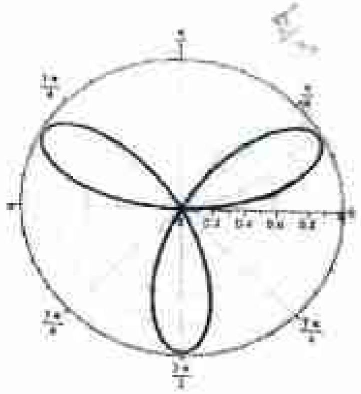
2pt 2) Calculer le volume du domaine :

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

Bon Courage !!

Exercice 2: (4 points)

A) Considérons un cercle (C) de rayon 1 et une rosace à trois branches d'équation polaire : $r = sin(3\theta)$.



1pt 1- Calculer l'aire intérieure à la rosace

1pt 2- En déduire l'aire du domaine intérieur au cercle (C) et extérieur à la rosace.

2pt B) Calculer le volume du domaine :

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \leq 5, x - y + z \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Exercice 3 : (7.5 points)

A) Considérons la forme différentielle :

$$\omega(x, y) = 2xe^{x^2-y}\, dx - 2e^{x^2-y}\, dy.$$

0.5pt 1- Montrer que ω n'est pas exacte.

1pt 2- Trouver $\psi(x)$ telle que : $\psi(x)\omega$ soit exacte.

1pt 3- Déterminer une fonction f telle que : $\psi(x)\omega = df$.

1pt 4- En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $\oint_\Gamma \omega$ où Γ est le bord du carré $[0,1] \times [0,1]$ parcouru dans le sens trigonométrique.

1pt 5- Calculer : $\oint_\Gamma \psi(x)\omega$.

B) On considère le champ vectoriel : $\vec{V}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

1pt 1- Calculer $\vec{rot}\vec{V}$.

1pt 2- Ce champ dérive-t-il d'un potentiel ?

3- Soit la forme différentielle :

$$\mu(x, y, z) = yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$$

1pt Calculer l'intégrale de μ le long de l'hélice H paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = cos\, t \\ y(t) = sin\, t \quad avec\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ z(t) = t \end{cases}$$

BONNE FETE عيد مبارك سعيد